

UNIDAD DIDÁCTICA Nº2

Introducción a la probabilidad. Espacios muestrales finitos. Probabilidad condicional.

Modelos matemáticos. Modelos determinísticos versus métodos probabilísticos o aleatorios. Conceptos básicos de probabilidad: espacio muestral, sucesos. Probabilidad empírica o frecuencial.

Probabilidad de ocurrencia de un suceso. Definición clásica de probabilidad y sus limitaciones. Definición axiomática de probabilidad. Consecuencias de los axiomas. Teoremas básicos.

Espacios muestrales finitos. Resultados igualmente probables. Métodos de enumeración: principio de multiplicación, principio de adición, permutaciones, combinaciones, permutaciones cuando no todos los objetos son diferentes.

Probabilidad condicional. Teorema de las probabilidades totales. Teorema de Bayes. Sucesos independientes. Probabilidad condicional e independencia.

ACTIVIDADES TRABAJADAS EN CLASE:

1. Experimentos deterministas y experimentos aleatorios

Experimentos tipo A

¿Qué ocurrirá si experimentamos poniendo agua en un recipiente y calentándola hasta 100°C? ¿Qué ocurrirá si suelto un vaso que tengo en la mano?

Experimentos tipo B

Si arrojo un dado, ¿qué número aparecerá en la cara superior? Si tiramos una moneda, si seleccionamos al azar una ficha del archivo de participantes del curso a distancia, ¿cuál será la profesión de la persona seleccionada? ¿Cuántas veces debemos arrojarla hasta que salga cara?

Visita la siguiente página:

http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/090325_probabilidad.elp/index.html

2. Espacio Muestral – Evento o suceso

Ejemplo 1

En muchos juegos de naipes se utiliza una baraja de 52 cartas; dividida en dos colores: rojo y negro, y cuatro palos: corazón, diamante, trébol y pique. Dentro de cada palo hay 13 cartas: 1, 2, 3, ... 10, J, Q, K.

Ejemplos 2

Tirar una moneda al aire, es un experimento aleatorio. La obtención de una cara es un evento aleatorio pues antes de que la moneda toque el suelo no se puede predecir si el resultado será cara o cruz.

Extraer una carta de un mazo de naipes es un experimento aleatorio, y la obtención de, por ejemplo un trébol, es un evento aleatorio.

3. Definición clásica de Probabilidad

Ejemplo 3

Un bolillero contiene 20 bolillas numeradas de 1 a 20. Si se elige al azar una bolilla, ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la bolilla elegida sea divisible por 3?

4. Probabilidad empírica o frecuencial

Ejemplo 4

Si una moneda no es perfecta, la probabilidad de obtener cara al lanzarla, no es $1/2$, debido a que los dos resultados posibles no son igualmente probables.

Ejemplo 5

Podemos suponer que cierta empresa tiene un archivo con todos los reclamos de garantía efectuados por los clientes durante un año. Se decide tomar una muestra de $n = 70$ reclamos y clasificarlos por categoría de defectos. (Partimos de suponer que cada reclamo de garantía contempla una y sólo una de las categorías de defectos).

La extracción de los reclamos puede ser considerada un experimento aleatorio pues el resultado individual registrado en cada ficha no puede predecirse hasta que la misma sea seleccionada y leída. Este experimento aleatorio se repite un número $n = 70$ veces bajo condiciones uniformes. Los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla:

Categoría de defecto	Cantidad de reclamos (n_i)	Frecuencia relativa (h_i)
Menor	38	0,543
Apenas serio	20	0,286
Serio	8	0,114
Mayor	4	0,057
Total	70	1,000

5. Axiomas de probabilidad

Ejemplo 6

Supongamos que un experimento aleatorio consiste en tirar un dado perfecto, sólo una vez. Analizar los axiomas de probabilidad.

6. Consecuencias de los axiomas - Probabilidad condicional

Ejemplo 7

Al tirar un dado:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 7 al tirar?
- Si sale 1 al tirar un dado ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra esto?
- ¿Entre qué valores varían las probabilidades obtenidas?

Ejemplo 8

Supongamos que en una muestra de 30 niños se obtuvieron los siguientes resultados referidos a peso y altura:

- Calcular la probabilidad de que un niño de esta muestra sea alto o flaco.
- Calcular la probabilidad de que un niño sea a la vez gordo y alto.
- Considerando únicamente la variable peso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea alto, siendo flaco?
- Calcular la probabilidad de que un niño sea gordo condicionado al hecho de saber que es alto.

	Alto (B_1)	Bajo (B_2)	Total
Gordo (A_1)	12	6	18
Flaco (A_2)	8	4	12
Total	20	10	30

7. Eventos independientes

Ejemplo 9

Treinta y cinco hombres de una muestra, se clasificaron de acuerdo a sus hábitos de fumar y considerando si tienen o no frecuentes dolores de cabeza.

Los resultados obtenidos fueron:

	Fuman (A_1)	No fuman (A_2)	Total
Con frecuentes dolores (B_1)	12	8	20
Sin frecuentes dolores (B_2)	9	6	15
Total	21	14	35

Analizar que el suceso "con frecuentes dolores de cabeza" es independiente del de "fuman" o "no fuman".

8. Partición

Ejemplo 10

En el lanzamiento de un dado $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$ y $B_3 = \{6\}$ representan una partición del espacio muestral, mientras que $C_1 = \{1,2,3,4\}$ y $C_2 = \{4,5,6\}$ no lo es.

9. Teorema de Bayes

Ejemplo 11

El 20% de los alumnos de una Facultad son de Rosario y otro 20% son de Pergamino, el resto son de San Nicolás. El 75% de los alumnos de Rosario cursan el ciclo superior y el 50% de los de Pergamino también, mientras que de los de San Nicolás solamente el 20% cursan el ciclo superior. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno del ciclo superior elegido al azar sea de Rosario?

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

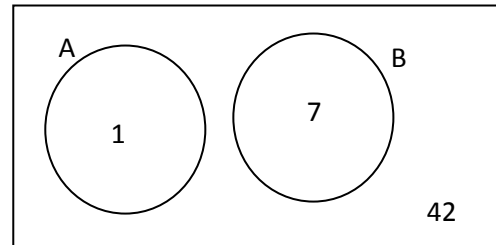
- La probabilidad de que llueva el día de hoy es del 80%. ¿Cuál de las siguientes proposiciones explica mejor lo que se afirma?
 - Lloverá 80% del día de hoy.
 - Lloverá en 80% del área en la cual se aplica la predicción del día de hoy.
 - En el pasado, las condiciones del clima de este tipo han producido lluvia en esta área 80% de las veces.
- Determinar la probabilidad de los siguientes eventos que se dieron al sacar una carta de un mazo de 50 cartas de la baraja española:
 - Un siete
 - Una carta de espadas
 - Un as o un rey
 - Un dos o un tres de copas
 - Una figura de oro (sota, caballo o rey)

¿Qué tipos de estimaciones de probabilidad son éstos?
- Clasificar las estimaciones de probabilidad siguientes según su tipo (clásica, de frecuencia relativa o subjetiva):
 - La probabilidad de que el director actual de la escuela renuncie es de 0,85.

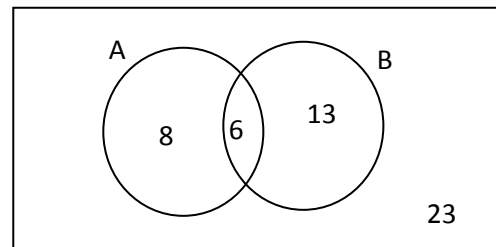
- b) La probabilidad de que mi equipo favorito de futbol anote goles durante un partido es de 0,47.
 - c) La probabilidad de obtener dos 6 al lanzar dos dados al mismo tiempo es de 1/36.
 - d) La probabilidad de que un presidente electo en un año que termina en cero muera en su oficina es de 0,024.
 - e) La probabilidad de que usted viaje este año a Europa es de 0,14.
4. Si suponemos que es igualmente posible que una persona nazca un día cualquiera de la semana, ¿cuáles son las probabilidades de que la beba de Silvia nazca:
- a) Un martes
 - b) Un día que contiene la letra m
 - c) Entre jueves y sábado incluyéndolos?
¿Qué tipo de probabilidad son estas?

5. Los siguientes diagramas de Venn indican el número de resultados de un experimento correspondiente a cada evento, y el número de resultados que no corresponden a ningún evento. Tomando en cuenta estos diagramas, dar las probabilidades que se piden:

- a) Total de resultados= 60
 $P(A)=$
 $P(B)=$
 $P(A \cup B)=$



- b) Total de resultados= 50
 $P(A)=$
 $P(B)=$
 $P(A \cup B)=$



6. Sea el siguiente experimento aleatorio ε : arrojar dos dados equilibrados y se registran los resultados obtenidos.
- i) Construir el espacio muestral S
 - ii) Calcular la probabilidad de obtener:
 - a) A: un total de 4 puntos
 - b) B: un total de 7 puntos
 - c) C: un total de 7 u 11 puntos
 - d) D: un total de por lo menos 8 puntos
 - e) E: un par de 2
 - f) F: a lo sumo un total de 6 puntos
 - g) G: un 1 y un 5
7. Un lote consta de 10 artículos sin defecto, 4 con pequeños defectos y 2 con defectos graves. Se elige un artículo al azar. Encontrar la probabilidad de que:
- a) No tenga defectos
 - b) No tenga defectos grave
 - c) Que no tenga defecto o que tenga un defecto grave

8. De 6 números positivos y 8 números negativos se eligen 4 al azar (sin sustitución) y se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo?
9. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio ϵ . Suponga que:
 $P(A)=0,4$
 $P(A \cup B)=0,7$
 $P(B)=x$
- ¿Para qué elección de x resultan A y B mutuamente excluyentes?
 - ¿Para qué elección de x resultan A y B independientes?
10. Sean A, B y C tres sucesos asociados a un experimento aleatorio ϵ . Suponga que
 $P(A \cup B)=0,7$
 $P(C)=0,3$
 $P(A/B)=P(B/A)$
 $P(A \cap B/C) = P(C/A \cap B)$
- Demostrar que $P(A)=P(B)$
 - Hallar $P(A) \cdot P(B)$
11. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo hijo de una pareja se:
- Un varón, dado que el primero fue una niña?
 - Una niña, dado que el primero fu un varón?
12. Durante un estudio sobre accidentes automovilísticos, el Consejo de Seguridad Vial encontró que 60 % de los accidentes suceden de noche, 52% están relacionados con conductores alcoholizados y 37% se presentan de noche y están relacionados con conductores ebrios.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un accidente esté relacionado con un conductor alcoholizado, dado que sucedió de noche?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un accidente haya sucedido de noche, dado que está relacionado con un conductor ebrio?
13. De los alumnos de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, el 75% asistió regularmente a las clases de "Probabilidad y Estadística I" y el 80% de los mismos aprobó el examen final, mientras que este porcentaje para los alumnos que no asistieron regularmente es del 60%.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya aprobado el examen final?
 - Si se eligió un alumno que aprobó el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente?
14. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40% de la producción total respectivamente. De lo que producen, 5, 4 y 2% respectivamente, son pernos defectuosos. Se escoge un perno al azar y resulta defectuoso. ¿Cuáles son las posibilidades respectivas de que el perno provenga de la máquina A, B ó C?